Capítulo 2 - Estática das Partículas

Ao longo desta secção será abordada a análise do efeito de forças actuando em partículas. Substituição de duas ou mais forças que actuam na partícula por uma equivalente. A relação entre as várias forças que actuam na partícula em estado de equilíbrio, de modo a ser possível obter as forças que actuam na mesma.

Inicialmente será feito o estudo de forças contidas no mesmo plano, seguindo-se a análise de forças no espaço tridimensional.

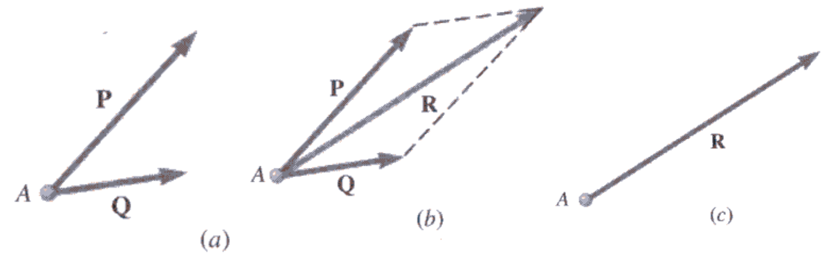
2.1- FORÇAS NO PLANO

2.1.1- Resultante de duas forças

Uma força representa a acção de um corpo sobre outro, e é geralmente caracterizada pelo seu ponto de aplicação, sua intensidade, a sua direcção e seu sentido.

Dado que as forças actuantes numa dada partícula têm o mesmo ponto de aplicação, neste capítulo as forças consideradas ficaram completamente definidas pelas restantes características.

Sendo $\vec{P}\ e\ \vec{Q}$ duas forças que actuam numa partícula, estas podem ser substituídas por uma única força $\vec{R}$ que produz o mesmo efeito sobre a partícula.



2.1.2- Vectores

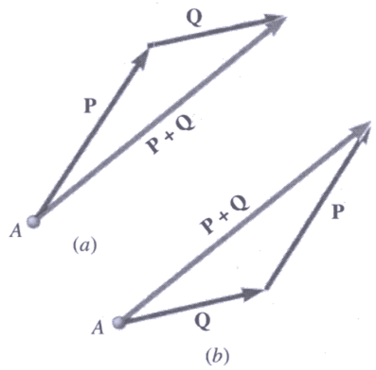
Os vectores são definidos como grandezas matemáticas, possuindo intensidade, direcção e sentido e somam-se de acordo com a regra do paralelogramo.

Representam-se por: $\vec{P}$, P, ou **P**

1)- A adição de vectores é comutativa

$$\vec{P}+\vec{Q}=\vec{Q}+\vec{P}$$

Que pode ser demonstrada pela regra do triângulo

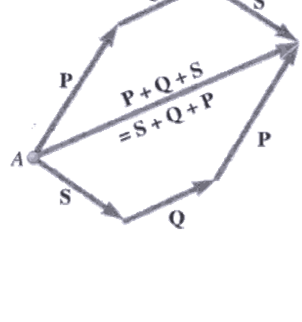


2)- A subtracção de um vector é definido como a adição do vector oposto.

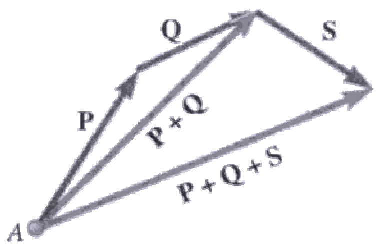
$$\vec{P}-\vec{Q}=\vec{P}+(-\vec{Q})$$

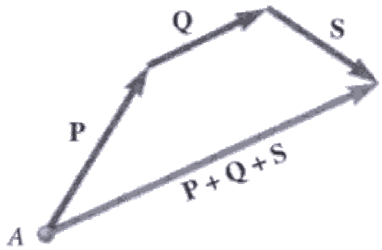
3)- A adição de vectores é associativa

$$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{S}=(\vec{Q}+\vec{P})+\vec{S}=\vec{S}+(\vec{Q}+\vec{P})=\vec{S}+\vec{Q}+\vec{P}$$



Enquanto que a regra do triângulo é utilizada para somar dois vectores, a regra do polígono é utilizada na adição de três ou mais vectores.





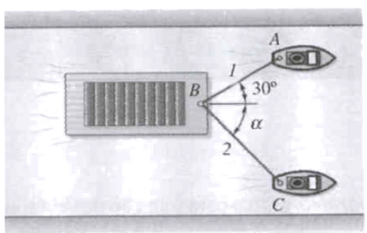
3)- Produto escalar por um vector

o produto k$\vec{P}$ de um escalar k por um vector $\vec{P}$, é definido como um vector tendo a direcção de $\vec{P}$, o mesmo sentido de $\vec{P}$ (se k for positivo) e intensidade igual ao produto de $\vec{P}$ pelo valor absoluto de k.

2.1.3- Decomposição de uma força em componentes

Da mesma forma que duas ou mais forças podem ser substituídas por uma única força, Resultante, o processo inverso também é de interesse. Torna-se assim possível determinar as componentes da força $\vec{R}$ através da decomposição da força $\vec{R}$ em componentes.

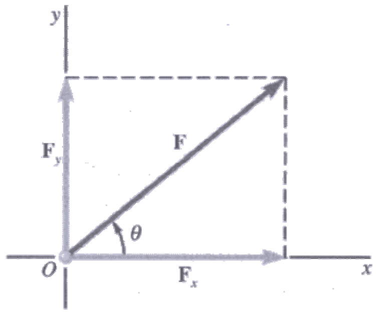
PROBLEMA-TIPO 2.2

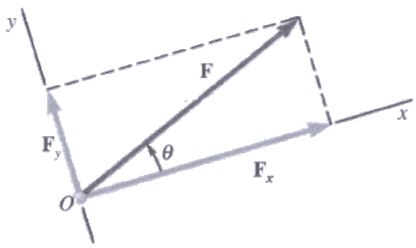


Uma jangada é puxada por dois rebocadores. Se a resultante das forças exercidas pelos rebocadores for uma força de 22 240 N dirigida segundo o eixo da jangada, determine (*a*) a força de tracção instalada em cada uma das cordas sabendo que $\alpha = 45°$, (*b*) o valor de α para o qual a força de tracção instalada na corda 2 é mínima.

2.1.4- Componentes cartesianas de uma força

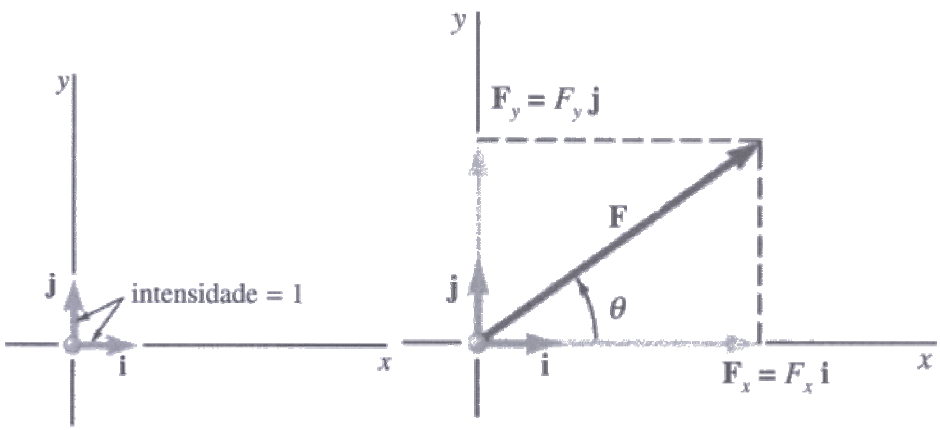
Em muitos problemas será desejável decompor uma força em duas componentes que sejam perpendiculares entre si, coincidindo, ou não, com as direcções vertical e horizontal.





As componentes $\vec{F}x \; e \; \vec{F}y$ são chamadas componentes cartesianas.

Tomando dois em consideração dois vectores de intensidade unitária dirigidos segundo x e y,

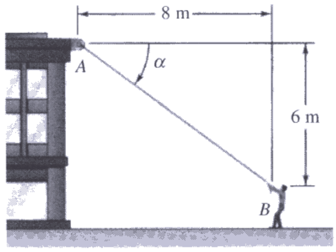


As componentes cartesianas podem ser expressas da forma:

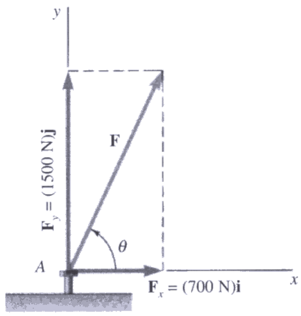
$$\vec{F}x = Fx\mathrm{i} \qquad \vec{F}y = Fyj$$

$$\vec{F} = Fxi + Fyj$$

em que i e j são os vectores unitários chamados VERSORES.



Exemplo 2. Um homem puxa com uma força de 300 N uma corda ligada a um edifício, conforme é indicado na Fig. 2.23*a*. Quais são as componentes horizontal e vertical da força exercida pela corda no ponto *A*?



Exemplo 3. Uma força **F** = (700 N)**i** + (1500 N)**j** é aplicada a um parafuso *A*. Determine a intensidade da força e o ângulo θ que ela forma com a horizontal.

2.1.5- Adição de forças somando as componentes segundo x e y

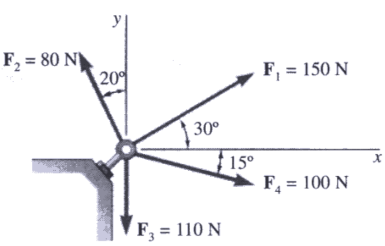
A soma de três ou mais forças pode ser obtida de uma forma analítica, através da decomposição de cada uma nas suas componentes cartesianas.

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$$

Rx= Px+Qx+Sx

Ry=Py+Qy+Sy

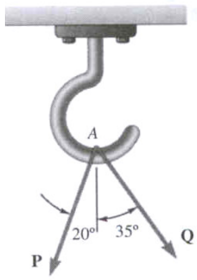
Desta forma as componentes escalares Rx e Ry da resultante $\vec{R}$ de várias forças são obtidas adicionando algébricamente as correspondentes componentes escalares das forças dadas.



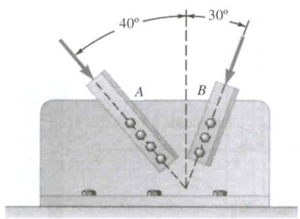
PROBLEMA-TIPO 2.3

Quatro forças actuam num parafuso como se indica na figura. Determine a resultante das forças no parafuso.

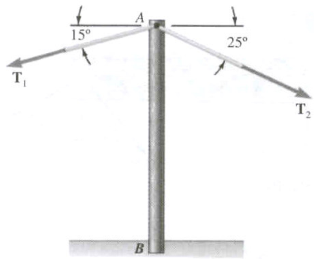
2.2 Duas forças **P** e **Q** são aplicadas no ponto A de um gancho de suporte conforme é indicado. Sabendo que $P = 75$ N e $Q = 125$ N, determine graficamente a intensidade, a direcção e o sentido da sua resultante usando (a) a regra do paralelogramo, (b) a regra do triângulo.



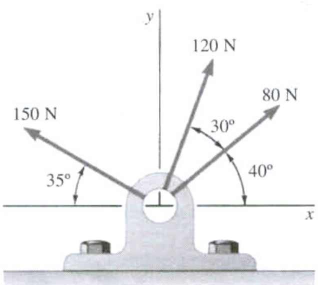
2.19 Duas peças estruturais A e B estão aparafusadas a um suporte, conforme se indica. Sabendo que ambas as peças estão comprimidas e que as forças são de 15 kN na peça A e de 10 kN na peça B, determine, por trigonometria, a intensidade, direcção e sentido da resultante das forças aplicadas ao suporte pelas peças A e B.

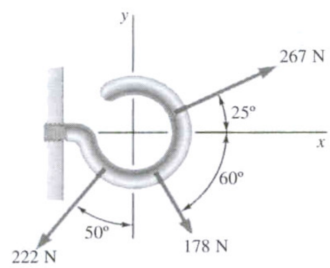


2.7 Um cabo de telefone está preso em A ao mastro AB. Sabendo que a força de tracção instalada na parte esquerda do cabo é $T_1 = 3{,}56$ kN, determine, por trigonometria, (a) a força de tracção T_2 requerida na parte direita do cabo, se se pretender que a resultante **R** das forças exercidas pelo cabo em A seja vertical, (b) a correspondente intensidade de **R**.

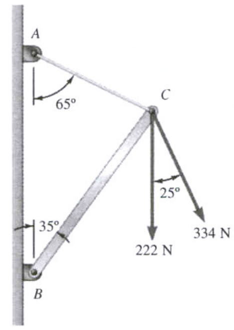


2.21 e 2.22 Determine as componentes segundo x e y de cada uma das forças indicadas.

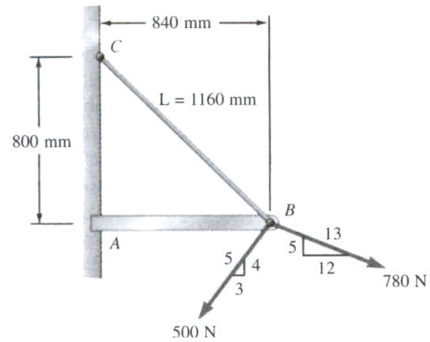




2.41 Determine (*a*) a força de tracção requerida no cabo *AC*, sabendo que a resultante das três forças exercidas no ponto *C* da haste *BC* deve estar dirigida segundo *BC*, (*b*) a correspondente intensidade da resultante.



2.36 Sabendo que a força de tracção instalada no cabo *BC* é de 725 N, determine a resultante das três forças exercidas no ponto *B* da viga *AB*.



2.1.6- Equilíbrio de um Ponto material

1ª Lei de Newton

" se a resultante de todas as forças que actuam numa partícula é nula, então a partícula está em equilíbrio"

Sendo a resultante nula,

$$\sum (Fxi + Fyj) = 0$$

desta forma, para uma partícula permanecer em equilíbrio basta que:

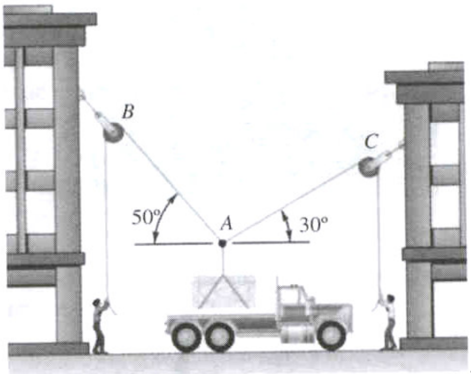
$$\sum Fx = 0 \qquad \sum Fy = 0$$

Graficamente o equilíbrio é estabelecido quando na utilização da regra do polígono, os vectores formam um polígono fechado, em que a extremidade do último vector coincide com a origem do primeiro.

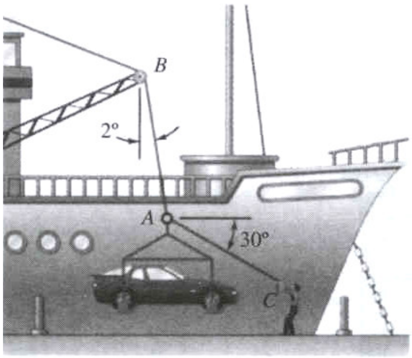
2.1.7- Diagrama de corpo livre

Na prática, os problemas em engenharia derivam de situações físicas reais, que podem ser esquematizadas e simplificadas.

Se isolarmos o efeito de tudo o que o rodeia, obtém-se o diagrama de corpo livre.

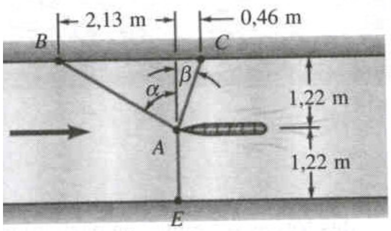


Sendo o peso do caixote de 736N, qual a força instalada em cada corda AB e AC.



PROBLEMA-TIPO 2.4

Numa operação de descarga de um navio, um automóvel de 15000 N é suportado por um cabo. Uma corda ligada ao cabo em *A* está a ser puxada de modo a centrar o automóvel na posição pretendida. O ângulo entre o cabo e a vertical é de 2°, enquanto o ângulo entre a corda e a horizontal é de 30°. Qual é a força de tracção instalada na corda?



Como parte do dimensionamento de um novo veleiro, deseja-se determinar a força de arrasto que se pode esperar a uma dada velocidade. Para tal, coloca--se um modelo do casco proposto num canal de ensaios e usam-se três cabos para manter a quilha na linha central do canal. Para uma dada velocidade, as leituras dinamométricas indicam forças de tracção de 180 N no cabo *AB*, e de 267 N no cabo *AE*. Determine a força de arrasto exercida no casco e a força de tracção instalada no cabo *AC*.

2.43 Dois cabos estão ligados entre si em *C* e estão carregados conforme é indicado. Determine a força de tracção instalada (*a*) no cabo *AC*, (*b*) no cabo *BC*.

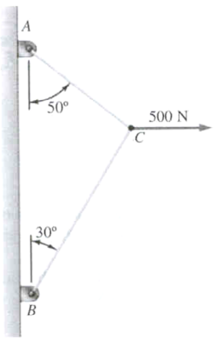


Fig. P2.43

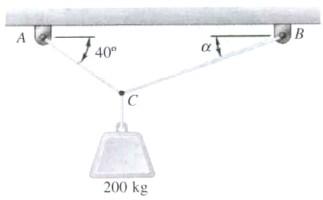
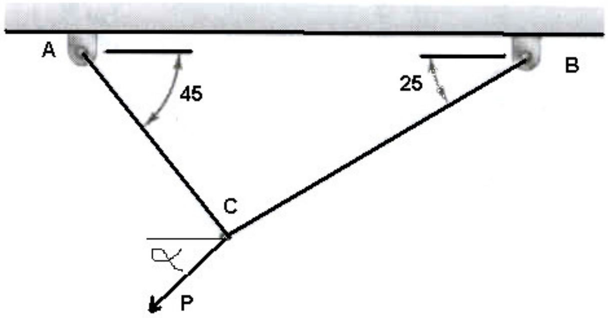


Fig. P2.44

2.44 Dois cabos estão ligados entre si em *C* e estão carregados conforme é indicado. Sabendo que $\alpha = 20°$, determine a força de tracção instalada (*a*) no cabo *AC*, (*b*) no cabo *BC*.

Nos cabos apresentados, o valor máximo admissível para a força a suportar é de 300N em AC e de 400N em BC.

Qual a maior força P que pode ser aplicada em “C” e qual o valor de α.



2.67 Um caixote de 2,67 N é suportado por vários arranjos de cordas e roldanas conforme indicado. Determine, para cada arranjo, a força de tracção instalada na corda. (Ver a sugestão dada no Prob. 2.65.)

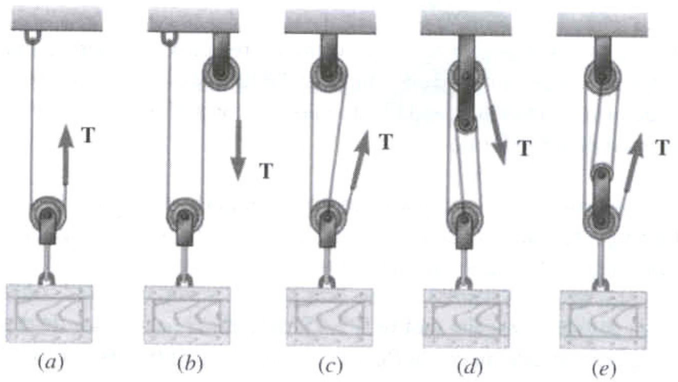
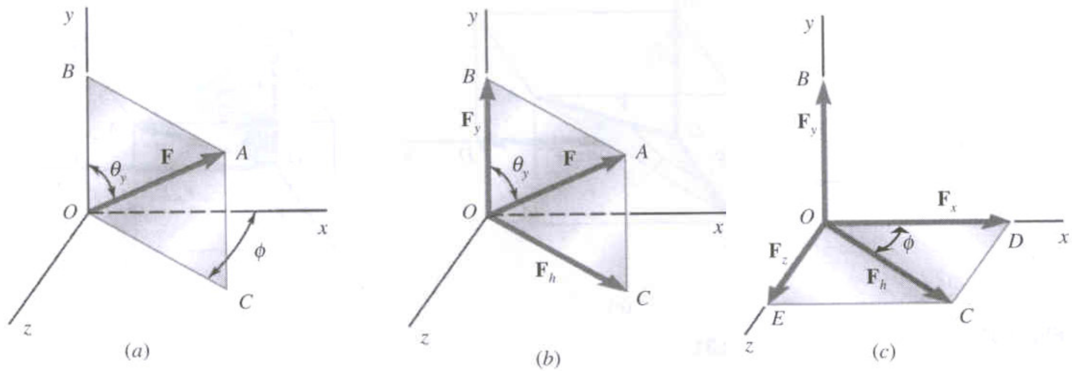


Fig. P2.67

2.2- Forças no espaço

Neste momento passar-se-á a analisar problemas envolvendo as três dimensões do espaço.

Considerando a força apresentada,



Temos que:

$$\vec{F}_y = F \times Cos\theta_y$$

$$\vec{F}_x = F \times Sen\theta_y \times Cos\phi$$

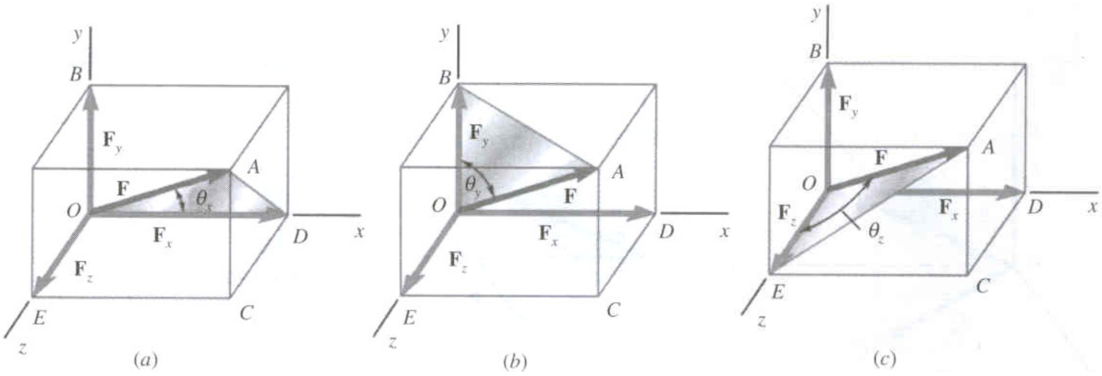
$$\vec{F}_z = F \times Sen\theta_y \times Sen\phi$$

Pela análise dos triângulos OAB e OCD obtém-se a relação entre a intensidade de $\vec{F}$ e as componentes cartesianas escalares.

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}$$

2.2.1- Cosenos directores

Considerando a figura apresentada, em que uma dada força $\vec{F}$ está posicionada no espaço fazendo um angulo θ_i em relação ao semi-eixo i, temos que:



F_x=F*Cosθ_x F_y=F*Cosθ_y F_z=F*Cosθ_z

Os três ângulos θ_x, θ_y, θ_z, definem a direcção da força $\vec{F}$, daí serem conhecidos como <u>cosenos directores</u> da força $\vec{F}$.

Sendo:

$$\vec{F} = F.\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$ l =Cosθ_x m =Cosθ_y n =Cosθ_z

$$\theta_i = \arccos\left[F_i / F \right]$$

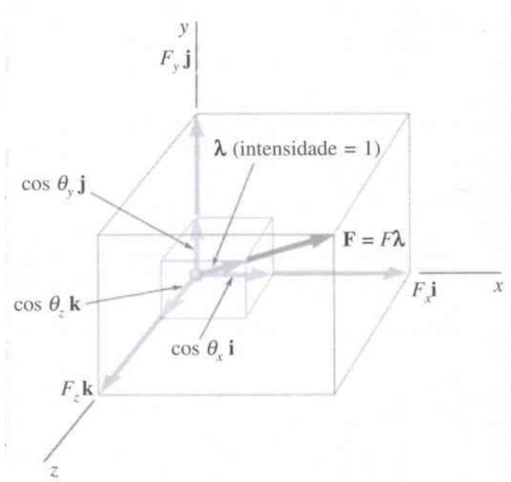
Introduzindo os VERSORES i, j, k a força $\vec{F}$ fica da forma

$\vec{F}$ =F_x i+ F_y j+ F_z k

$\vec{F}$ =F (Cosθ_x i + Cosθ_y j + Cosθ_z k)

O que nos leva a concluir que a força $\vec{F}$ pode ser expressa como o produto escalar de F pelo vector de intensidade unitária $\underline{\lambda}$, que tem a direcção e sentido de $\vec{F}$ e as suas componentes são iguais aos cosenos directores de $\vec{F}$.

$\underline{\lambda}$ =($\cos\theta_x \, \underline{i} + \cos\theta_y \, \underline{j} + \cos\theta_z \, \underline{k}$)



Nota: Apenas 2 Cos. directores independentes
$\cos^2(\Theta x) + \cos^2(\Theta y) + \cos^2(\Theta z) = 1$

Exemplo:

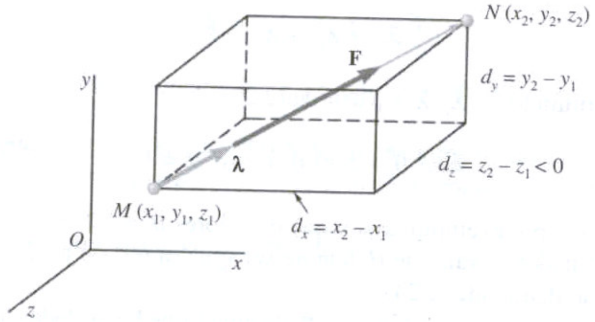
Uma força $\vec{F}$ tem por componentes Fx=20N, Fy=-30N e Fz=60N. Determine a sua intensidade, e os ângulos θ_x ,θ_y ,θ_z.

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}$$

$$\theta_i = \arccos\left[{F_i}/{F} \right]$$

2.2.2- Força definida pela sua intensidade e dois pontos da sua linha de acção

Considere a força $\vec{F}$ definida pelas coordenadas de dois pontos M e N, localizados na sua linha de acção.



Sendo o vector MN representado pelas suas componentes escalares dx, dy e dz,

$\underline{MN} = dx\ \underline{i} + dy\ \underline{j} + dz\ \underline{k}$

Dividindo o vector MN pela sua intensidade, obtém-se o versor $\underline{\lambda}$ da linha de acção de $\vec{F}$

$$\underline{\lambda} = \frac{\vec{MN}}{MN} = \frac{1}{d}\,(dx\ \underline{i} + dy\ \underline{j} + dz\ \underline{k})$$

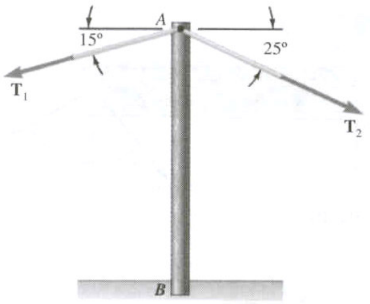
$$\vec{F} = F\underline{\lambda} = \frac{F}{d}\,(dx\ \underline{i} + dy\ \underline{j} + dz\ \underline{k})$$

de onde se obtém as componentes cartesianas

$$F_x = \frac{F}{d}dx \qquad F_y = \frac{F}{d}dy \qquad F_z = \frac{F}{d}dz$$

de $\cos\theta_i = \frac{Fi}{F}$ podemos obter somente a partir das coordenadas de M e N os cosenos directores. $\cos\theta_i = \frac{di}{d}$

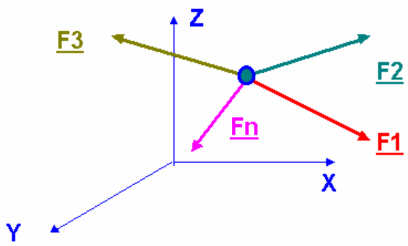
2.7 Um cabo de telefone está preso em A ao mastro AB. Sabendo que a força de tracção instalada na parte esquerda do cabo é $T_1 = 3{,}56$ kN, determine, por trigonometria, (a) a força de tracção T_2 requerida na parte direita do cabo, se se pretender que a resultante **R** das forças exercidas pelo cabo em A seja vertical, (b) a correspondente intensidade de **R**.



2.2.3- Resultante de forças concorrentes no espaço

A resultante deverá ser determinada pela soma das componentes cartesianas das diversas forças em presença.

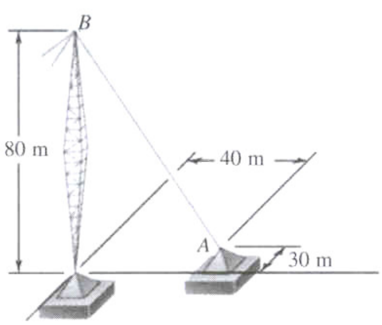
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} F_{xi} \\ \sum_{i=1}^{n} F_{yi} \\ \sum_{i=1}^{n} F_{zi} \end{Bmatrix}$$



$$Rx = \sum Fx \qquad Ry = \sum Fy \qquad Rz = \sum Fz$$

$$R = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2} + R_z^{\ 2}}$$

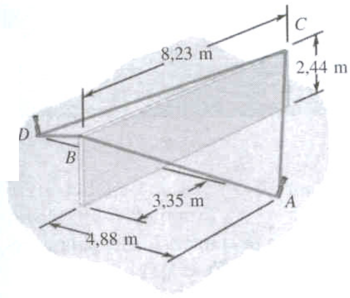
$$\theta_i = \arccos\left[{}^{R_i}\!/_{R} \right]$$



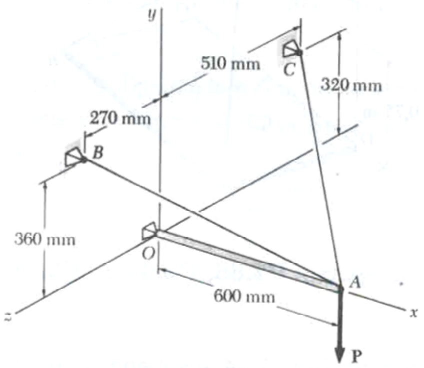
PROBLEMA-TIPO 2.7

Uma espia de uma torre está ancorada num parafuso em A. A força de tracção instalada na espia é de 2500 N. Determine (a) as componentes F_x, F_y, F_z da força actuante no parafuso, (b) os ângulos θ_x, θ_y, θ_z que definem a direcção da força.

Uma secção de uma parede de betão pré-moldada está temporariamente segura pelos cabos indicados. Sabendo que as forças de tracção são de 3,74 kN no cabo AB e de 5,34 kN no cabo AC, determine a intensidade e a direcção da resultante das forças exercidas pelos cabos AB e AC na estaca A.



2.72 À barra OA é aplicada uma carga **P**. Sabendo que a tração no cabo AB é de 850 N e que a resultante da carga **P** e das forças aplicadas pelos cabos em A deve ter a direção de OA, determine a tração no cabo AC.



2.3- Equilíbrio de um ponto material em 3D

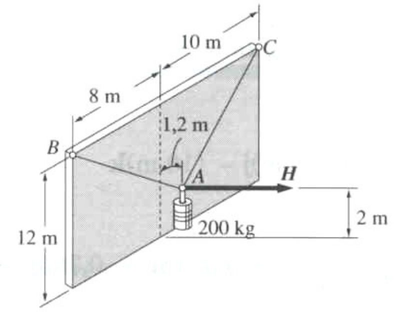
De acordo com o já obtido para o estado plano, uma partícula está em equilíbrio se a resultante de todas as forças é nula.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

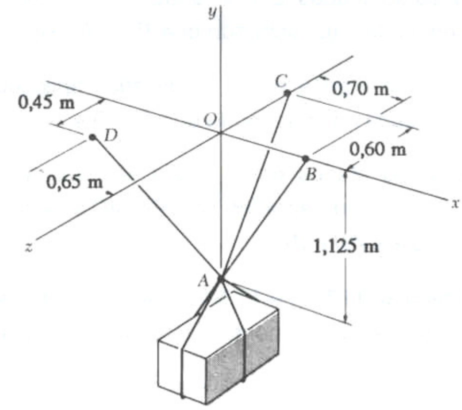
Para resolver problemas de equilíbrio no espaço deve ser feito:

a) Diagrama de corpo livre (D.C.L.)
b) Estabelecer as equações de equilíbrio

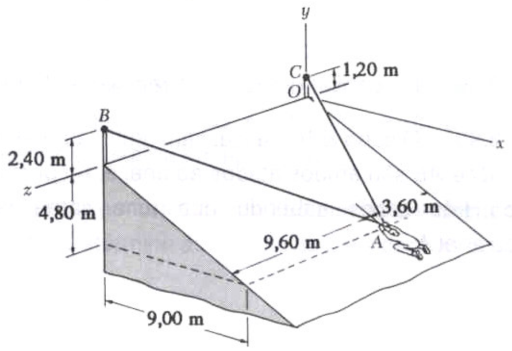
Um cilindro de 200 kg é pendurado por meio de dois cabos, AB e AC, amarrados ɪo topo de uma parede vertical. Uma força **H**, *horizontal e perpendicular à parede, nantém o peso na posição ilustrada. Determinar a intensidade de* **H** *e a tração em cada :abo.*



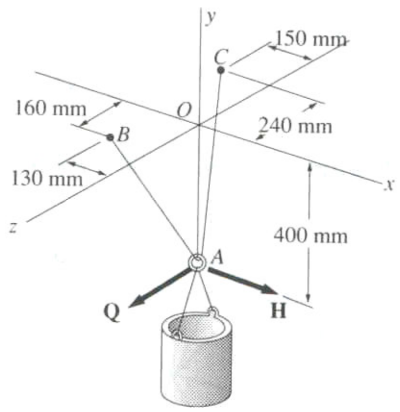
2.75 Uma caixa está suspensa por três cabos, como ilustrado. Determine o peso *P* da caixa sabendo que a tração no cabo *AB* é de 6 890 N.



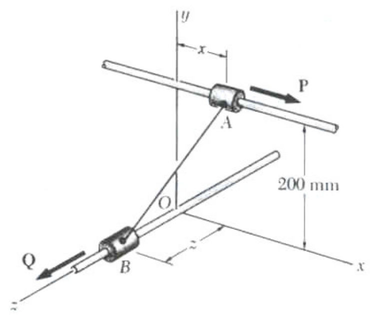
2.84 Tentando cruzar uma superfície gelada e escorregadia, um homem de 90 kg utiliza duas cordas, *AB* e *AC*. Sabendo que a força exercida pela superfície no homem é perpendicular à superfície, determine a tração em cada corda.



2.88 Um recipiente pende de um cabo único, que passa através de um anel, sem atrito, e é atado aos pontos fixos *B* e *C*. Duas forças, **H** = H**i** e **Q** = Q**k**, são aplicadas ao anel, a fim de que o recipiente permaneça na posição ilustrada. Sabendo que o peso do recipiente é *P* = 376 N, determine os módulos de **H** e **Q**. (*Sugestão*: A tração é a mesma nas partes *AB* e *AC* do cabo.)



*** 2.94** As mangas *A* e *B* estão ligadas por um cabo de 250 mm de comprimento e podem deslizar sem atrito sobre os respectivos eixos. Determine as distâncias *x* e *z* para as quais o sistema fica em equilíbrio com *P* = 200 N e *Q* = 100 N.



2.98 Determine o intervalo de variação dos valores de *P* para os quais o módulo da resultante das três forças aplicadas em *A* não excede 1 125 N.